

Γραμμική Άλγεβρα Ι

Φροντ. ασκήσεις #6, Ιαν. 2015, Θέμα: Γραμμικές Απεικονίσεις

1. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ που ορίζεται από την σχέση

$$\phi((x, y, z)) = (x + 2y, y - z, 2x + 4y)$$

είναι γραμμική. Να υπολογιστεί μια βάση του πυρήνα και μια βάση της εικόνας της ϕ .

2. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$ που ορίζεται από την σχέση

$$\phi((x, y)) = (x + 2y, y - x, x + 4y, x + y, y)$$

είναι γραμμική. Να υπολογιστεί μια βάση του πυρήνα και μια βάση της εικόνας της ϕ .

3. Να δειχθεί ότι η απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ που ορίζεται από την σχέση

$$\phi((x, y, z)) = (y + z, x + z, x + y)$$

είναι ισομορφισμός.

4. Να ορίσετε ένα ισομορφισμό από τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_3[x]$ στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

5. Βρείτε τον πίνακα του γραμμικού μετασχηματισμού $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ με $T(x, y, z) = (x - y + 2z, y - 3z, 2x + y, z)$ από την βάση $\alpha = \{(1, 0, 2), (1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ στην βάση $\beta = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$.

6. Βρείτε τον πίνακα αλλαγής βάσης από την βάση $\gamma = \{(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}$ στην κανονική βάση ϵ του \mathbb{R}^3 . Επίσης βρείτε τον πίνακα αλλαγής βάσης από την ϵ στην γ .

7. Θεωρούμε τον \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^3 και το γραμμικό μετασχηματισμό: $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, που ορίζεται ως εξής:

$$T(1, 0, 0) = (1, 1, 0)$$

$$T(1, 1, 0) = (0, 3, 1)$$

$$T(1, 1, 1) = (0, 4, -1)$$

(α') Να υπολογίσετε την τιμή $T(x, y, z)$ για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(β') Να βρείτε μια βάση του πυρήνα και μια βάση της εικόνας του T .

(γ') Να βρείτε τον πίνακα $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ από τη βάση $\alpha = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ στην ίδια βάση α του \mathbb{R}^3 .